CONCOURS SPÉCIAL T′

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 4

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

Dans ce problème, on modélise la réflexion de rayons lumineux parallèles sur un miroir concave et on étudie quelques propriétés géométriques des rayons réfléchis.

Étant donné un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, on note C (I) l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe C^2 sur I et telles que, pour tout élément x de I, $f''(x) > 0$.

Étant donné un segment $J = [a, b]$, où $a < b$, on note C (J) l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe C^1 sur $[a, b]$ et dont la restriction à $I =]a, b[$ appartient à C (I).

Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté au repère orthonormé direct canonique $(O; \vec{i}, \vec{k})$. Étant donné un élément f de C (I) (ou de C (J)), on note γ l'arc orienté de $\mathbb{R}^2$ défini par la représentation cartésienne $x \mapsto (x, f(x))$. Pour tout x, on note $(\vec{t}(x), \vec{n}(x))$ le repère de Frenet (direct) de γ au point x. La réflexion par rapport à la tangente à γ au point M (x) d'abscisse x transforme la droite passant par M (x) et dirigée par $\vec{k}$ en une droite notée D_x.

On dit que la réflexion sur γ est simple si, pour tout x, M (x) est le seul point commun à D_x et γ.

Dans la première partie, on étudie l'existence d'une enveloppe pour les droites D_x. Dans la deuxième, on examine les conditions portant sur f pour que la réflexion sur γ soit simple.

Enfin, la troisième partie est consacrée à l'étude de la réflexion dans l'espace, le miroir concave étant une surface de révolution d'axe $(O, \vec{k})$.

I. ENVELOPPE DES DROITES RÉFLÉCHIES

Étant donné I, on considère un élément f de C (I).

1. *Détermination de* D_x.

a. Déterminer les coordonnées dans le repère $(\vec{i}, \vec{k})$ du vecteur $\vec{t}(x)$ (vecteur unitaire de la tangente), puis du vecteur $\vec{n}(x)$ (vecteur unitaire de la normale).

b. Pour tout x, on note s_x la réflexion orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite vectorielle dirigée par $\vec{t}(x)$.

Montrer que l'image $\vec{d}(x)$ de $-\vec{k}$ par s_x est donnée par la relation :

$$\vec{d}(x) = 2(\vec{n}(x) \cdot \vec{k})\,\vec{n}(x) - \vec{k}. \tag{1}$$

c. Calculer les coordonnées de $\vec{d}(x)$.

Pour tout x, on pose :

$$\vec{V}(x) = -2f'(x)\,\vec{i} + [1 - f'^2(x)]\,\vec{k}. \tag{2}$$

Calculer $\vec{V}(x)$ en fonction de $\vec{d}(x)$. En déduire que $\vec{V}(x)$ est un vecteur directeur de la droite D_x.

2. *Condition nécessaire d'existence de l'enveloppe des droites* D_x.

Dans cette question, on suppose qu'il existe un arc γ_1 défini par une représentation paramétrique $x \mapsto \overrightarrow{OP}(x)$ de classe C^1 sur I, telle qu'en tout point $P(x)$ de γ_1, la droite D_x passe par $P(x)$ et que $\frac{d\overrightarrow{OP}}{dx}(x)$ appartienne à la direction de D_x.

On note alors h la fonction définie sur I par $\overrightarrow{MP} = h\vec{V}$.

a. Prouver l'existence de h et montrer que

$$h = \frac{\overrightarrow{MP} \cdot \vec{V}}{\|\vec{V}\|^2}.$$

En déduire que h est de classe C^1 sur I.

b. Montrer que $\frac{d\vec{V}}{dx} = -2f''\frac{d\overrightarrow{OM}}{dx}$, et que $\frac{d\overrightarrow{OP}}{dx} = (1 - 2f''h)\frac{d\overrightarrow{OM}}{dx} + h'\vec{V}$.

c. En écrivant que $\mathrm{Det}\left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dx}, \vec{V}\right) = 0$, établir que $h = \frac{1}{2f''}$. Par suite, f est de classe C^3 et γ_1 est défini par la représentation paramétrique :

(3) $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2f''}\vec{V}.$$

d. Calculer les coordonnées du point P défini par (3).

3. *Construction géométrique de l'enveloppe.*

On suppose que f appartient à C (I) et qu'elle est de classe C^3 sur I. On définit γ_1 par la relation (3).

a. Montrer que, pour tout x, γ admet un centre de courbure au point $M(x)$. On note $\Omega(x)$ ce point. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M\Omega}$, et celles du milieu Q du segment [M, Ω].

b. Montrer que, pour tout x, $P(x)$ est le projeté orthogonal sur D_x du point $Q(x)$.

c. Placer sur une figure l'arc γ, un point $M(x)$, la tangente et la normale à γ au point $M(x)$, la droite D_x, les points $\Omega(x)$, $Q(x)$ et $P(x)$, et l'arc γ_1.

4. *Condition suffisante d'existence de l'enveloppe.*

On suppose que f satisfait aux conditions énoncées au 3. et on définit γ_1 par la relation (3).

a. Prouver que γ_1 est de classe C^1.

b. Déterminer toutes les fonctions f telles que γ_1 soit réduite au point $A = (\alpha, \beta)$. On résoudra d'abord l'équation différentielle $x - \frac{f'(x)}{f''(x)} = \alpha$. On montrera ensuite que les fonctions f cherchées sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = \frac{C}{2}(x - \alpha)^2 + \beta - \frac{1}{2C}, \quad \text{où } C > 0.$$

Prouver que γ est un arc de parabole de foyer A.

En déduire une construction géométrique du centre de courbure $\Omega(x)$ en un point $M(x)$ de cette parabole γ.

c. On revient au cas général. Prouver que

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dx} = -\frac{f'''}{2f''^2}\vec{V}. \tag{4}$$

Caractériser les points stationnaires de γ_1.

d. On suppose que f appartient à C (I), est de classe C^3 sur I et que, pour tout élément x de I, $f'''(x) \neq 0$. Montrer que l'arc γ_1 défini par (3) est régulier à l'ordre 1 et que γ_1 est l'enveloppe des droites D_x.

e. On suppose que $I =]-a, a[$, où $a > 0$, que f appartient à C (I), est de classe C^3 sur I, et que f est paire.
Comparer $\overrightarrow{OP}(-x)$ et $\overrightarrow{OP}(x)$. Interpréter géométriquement. Montrer que P (0) est un point stationnaire de γ_1.

5. *Exemples.*

Dans chacun des deux cas suivants, déterminer γ_1 et représenter sur une même figure γ et γ_1.

a. $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = e^x$.

b. $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f(x) = -\cos x$.

II. CONDITIONS POUR QUE LA RÉFLEXION SOIT SIMPLE

Dans cette partie, étant donné un segment $J = [a, b]$, on pose $I =]a, b[$ et on considère un élément f de C (J). On note S (J) l'ensemble des fonctions f telles que la réflexion sur γ soit simple en tout point x de I.

1. *Généralités.*

a. On suppose que f appartient à S (J).

Montrer que, sur des intervalles K que l'on précisera, les fonctions g définies par :

$$g(x) = f(x) + \beta, \quad g(x) = f(x - \beta), \quad g(x) = f(-x), \quad g(x) = \frac{1}{\alpha} f(\alpha x),$$

où $\beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, appartiennent à S (K).

b. Soit c un élément de $[a, b]$ et φ_c la fonction définie sur $J = [a, b]$ par les relations :

$$\varphi_c(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{si } x \neq c \quad \text{et} \quad \varphi_c(c) = f'(c).$$

Interpréter graphiquement φ_c. Prouver que φ_c est une fonction continue strictement croissante sur J.

2. *Caractérisation des points* M (x) *où la réflexion est simple.*

Soit c un élément de $I =]a, b[$ tel que $f'(c) > 0$.

a. Déterminer le coefficient directeur m_c de la droite D_c.

b. Montrer que si $m_c \leqslant \varphi_a(c)$ la droite D_c ne rencontre Γ qu'au point M (c).

c. Montrer que si $m_c > \varphi_a(c)$ il existe un point d de $]a, c[$ tel que M (d) appartienne à D_c. Pour cela, on pourra étudier le signe de la fonction ψ définie sur $[a, b]$ par $\psi(x) = \varphi_a(x) - m_c$.

d. En conclure que la réflexion sur γ au point M (c) est simple si et seulement si

$$\frac{f'^2(c) - 1}{2f'(c)} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \tag{5}$$

e. Énoncer un résultat analogue lorsque $f'(c) < 0$.

3. *Condition suffisante pour que la réflexion sur γ soit simple.*

Soit f un élément de C (J), où J = $[a, b]$. On pose $\mu = \sup(-f'(a), f'(b))$. On considère un élément c de $]a, b[$.

a. Prouver que μ est strictement positif.

b. On suppose que J = [0, 1] et que $f'(c) > 0$.

Prouver que

$$\frac{f'^2(c) - 1}{2f'(c)} < \frac{\mu^2 - 1}{2\mu}.$$

(On pourra prouver que $t \mapsto \frac{t^2 - 1}{2t}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.)

Prouver d'autre part que

$$\frac{f(c) - f(0)}{c} > -\mu.$$

En déduire que, si $\mu \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$, la condition (5) est réalisée.

Étudier de même le cas où $f'(c) < 0$.

c. En déduire que, si J = [0, 1] et si $\mu \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$, f appartient à S (J).

d. On revient au cas général où J = $[a, b]$.

Montrer que si $\mu \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$, f appartient à S (J).

On pourra se ramener au cas où J = [0, 1] en considérant la fonction g définie sur [0, 1] par :

$$g(t) = \frac{1}{b - a} f(a + (b - a)t).$$

e. En reprenant l'exemple où $f(x) = e^x$, montrer que la condition $\mu \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ n'est pas nécessaire pour que f appartienne à S (J).

4. *Étude d'une condition suffisante portant sur f'' pour que la réflexion soit simple.*

On suppose que f est un élément de C (J) et que, pour tout élément x de I,

(6) $$f''(x) \leqslant \frac{2}{b - a}.$$

a. Soit c un élément de I = $]a, b[$ tel que $f'(c) > 0$.

Prouver que

$$f(c) - f(a) - f'(c)(c - a) + \frac{(c - a)^2}{b - a} \geqslant 0.$$

En déduire que la condition (5) est satisfaite.

b. Étudier de même le cas où $f'(c) < 0$.

c. Établir finalement que si f satisfait à la condition (6), alors f appartient à S (J).

d. En déduire que si f appartient à C (J), alors, pour tout élément d de $]a, b[$, il existe un segment K de centre d contenu dans $]a, b[$ tel que la restriction de f à K appartienne à S (K).

III. ÉTUDE DE LA RÉFLEXION SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté au repère orthonormé direct canonique $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit a un nombre réel strictement positif et f une fonction de classe C^3 sur $[0, a]$, appartenant à $C(]0, a[)$ et telle que $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$. On suppose enfin que pour tout $x \in]0, a[$, $f'''(x) \neq 0$.

On note U le disque ouvert de $\mathbb{R}^2$ de centre O et de rayon a et Σ la nappe de révolution définie par la représentation cartésienne $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. On pose $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. *Détermination des droites obtenues par réflexion sur* Σ.

   a. Montrer que f est de classe C^1 sur U et de classe C^2 sur $U - \{0\}$.

   b. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{n}(x, y)$ de la normale à Σ au point $M(x, y)$, où $(x, y) \in U$.

   c. Déterminer l'image $\vec{d}(x, y)$ de $-\vec{k}$ par la réflexion orthogonale $s_{x,y}$ par rapport au plan orthogonal à $\vec{n}(x, y)$.

   d. Pour tout élément (x, y) de $U - \{0\}$, on pose :

   $$(2') \qquad \vec{V}(x, y) = \left(-\frac{2x}{\rho} f'(\rho), -\frac{2y}{\rho} f'(\rho), 1 - f'^2(\rho) \right).$$

   Montrer que $\vec{V}$ est un vecteur directeur de la droite $D_{x,y}$ image de la droite passant par $M(x, y)$ et dirigée par $\vec{k}$ par la symétrie orthogonale par rapport au plan tangent à Σ au point $M(x, y)$.

   Montrer que $\vec{V}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $\vec{V}(0, 0) = \vec{k}$.

   e. Montrer qu'en tout point $M(x, y)$ la droite $D_{x,y}$ rencontre l'axe Oz en un point que l'on précisera.

2. *Enveloppe des droites* $D_{x,y}$.

   Soit φ la fonction paire définie sur $[-a, a]$ par $\varphi(x) = f(|x|)$.

   a. Montrer que φ appartient à $C([-a, a])$. On note γ l'arc du plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$ défini par φ et on définit γ_1 comme dans la partie I.

   b. Prouver que γ est une méridienne de Σ.

   c. Soit Σ_1 la nappe définie par la représentation paramétrique

   $$(3') \qquad (x, y) \mapsto \overrightarrow{OP}(x, y) = \overrightarrow{OM}(x, y) + \frac{1}{2f''(\rho)} \vec{V}(x, y), \quad \text{où } (x, y) \in U.$$

   Montrer que Σ_1 est de révolution autour de Oz et qu'elle admet γ_1 pour méridienne.

   d. Prouver que Σ_1 est de classe C^1 sur $U - \{0\}$ et montrer que le point $P(x, y)$ est régulier.

   e. Prouver enfin qu'en tout point $P(x, y)$ régulier sur Σ_1, la droite $D_{x,y}$ est tangente à Σ_1 en ce point.